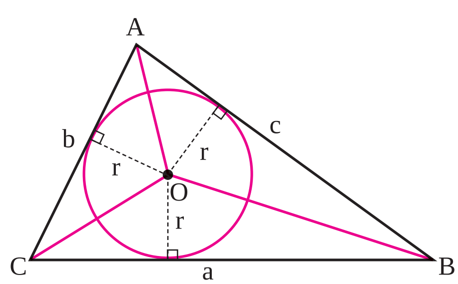
مثلث محیط بر دایره واحد

حسین کریمی
دبیر ریاضی تهران

اشاره
در این مقاله می‌خواهیم حداقل و حداکثر محیط و مســاحت مثلث‌های محیط بر دایره به شــعاع واحد را بررسی کنیم. ابتدا رابطهٔ بین محیط و مساحت مثلث محیط بر دایره به شعاع ۲ را به‌دست می‌آوریم.

مســئلهٔ۱. در درون مثلث ABC به مســاحت S و به محیط ۲P، دایره‌ای به شــعاع r محــاط کرده‌ایم. ثابت کنید: $r=\frac{S}{P}$.

$$S_{ABC}=S_{OBC}+S_{OCA}+S_{OAB}$$
$$=\frac{۱}{۲}ar+\frac{۱}{۲}br+\frac{۱}{۲}cr$$
$$=\frac{۱}{۲}(a+b+c).r=\frac{۱}{۲}(۲P)r$$
$$S=Pr\Rightarrow r=\frac{S}{P}$$

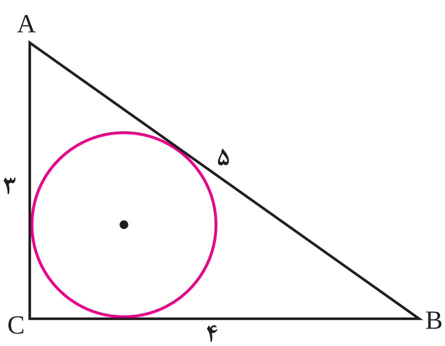


مســئلهٔ۲. مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع محیط بر دایره به شعاع ۱ را به‌دست آورید.

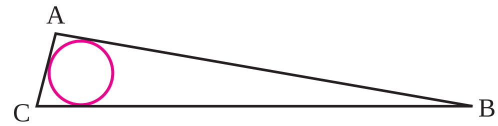
$$r=\frac{S}{P}\Rightarrow ۱=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲}{\frac{۳}{۲}a}\Rightarrow ۱=\frac{\sqrt{۳}a}{۶}\Rightarrow a=۲\sqrt{۳}$$
$$S=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲=\frac{\sqrt{۳}}{۴}(۲\sqrt{۳})^۲=\frac{\sqrt{۳}}{۴}\times ۱۲\Rightarrow S_{\Delta}=۳\sqrt{۳}$$

مسئلهٔ۳. در مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع ۳، ۴ و ۵ دایرهٔ محاطی داخلی را رســم کرده‌ایم. اندازهٔ شــعاع دایره را به‌دست آورید.

$$r=\frac{S}{P}=\frac{\frac{۱}{۲}(۳\times ۴)}{\frac{۱}{۲}(۳+۴+۵)}=\frac{۶}{۶}\Rightarrow r=۱$$



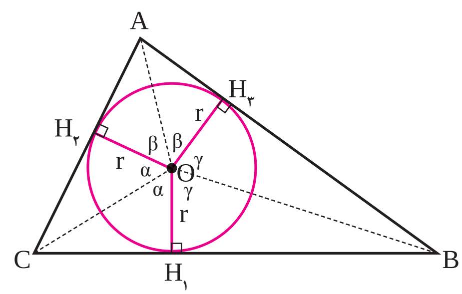
در هر دو مســئلهٔ اخیر با مثلث‌های محیط بر دایره به شــعاع ۱ آشنا شــدیم. در مســئلهٔ ۲ مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع را برابر با $۳\sqrt{۳}$ و در مسئلهٔ ۳ مساحت مثلث قائم‌الزاویه را برابر با ۶ به‌دست آوردیم. بدیهی است کــه با کوچک کردن زاویه‌ای (مثلاً B) می‌توان محیط مثلث را بزرگ‌تر و بزرگ‌تر کرد و چون r=۱ ثابت است و S=r.P، پس می‌توان مســاحت مثلث محیط بر دایره به شــعاع ۱ را نیز مانند محیطش به سمت بی‌نهایت سوق داد و حداکثری برای آن وجود ندارد.



سؤال اساسی: آیا برای محیط و مساحت مثلث محیط بر دایره به شعاع ۱ حداقلی وجود دارد؟

پاسخ مثبت است و داریم:

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{OH_۱CH_۲} + S_{OH_۲AH_۳} + S_{OH_۳BH_۱} \\ &= ۲S_{OCH_۲} + ۲S_{OAH_۳} + ۲S_{OBH_۱} \\ &= r.CH_۲ + r.AH_۳ + r.BH_۱ \end{aligned}$$



حال با توجه به اینکه شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث، واحد فرض شده است (r=۱) داریم:

$$S_{ABC} = \frac{CH_۲}{r} + \frac{AH_۳}{r} + \frac{BH_۱}{r}$$
$$\Rightarrow S_\Delta = \tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma$$

که در آن $۰ < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{۲}$ و $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ هستند و با توجه به برقراری نامساوی $۳\tan\frac{\alpha+\beta+\gamma}{۳} \leq \tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma$ * داریم:

$$۳\tan\frac{\pi}{۳} \leq \tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = S_\Delta \Rightarrow ۳\sqrt{۳} \leq S_\Delta$$

پس نتیجه می‌گیریم، حداقل مساحت مثلث محیط بر دایره به شعاع ۱، برابر با $۳\sqrt{۳}$ است که با توجه به مسئلهٔ ۲، می‌توان گفت مثلث متساوی‌الاضلاع محیط بر دایره، بین دیگر مثلث‌های محیط بر آن دایره، کمترین مساحت را دارد.

مسئله برای علاقه‌مندان: ثابت کنید بین مثلث‌های محیط بر یک دایره، حداقل محیط، فقط و فقط، از آنِ مثلث متساوی‌الاضلاع است.

برای اثبات نامساوی *، لم زیر را ثابت می‌کنیم.

لم: به ازای هر x و y، اگر $۰ < x, y < \frac{\pi}{۲}$، آن‌گاه:
$۲\tan\frac{x+y}{۲} \leq \tan x + \tan y$.

حل:

$$\cos(x-y) \leq ۱$$
$$\Rightarrow \cos(x-y) + \cos(x+y) \leq ۱ + \cos(x+y)$$
$$\Rightarrow ۲\cos x.\cos y \leq ۲\cos^۲\frac{x+y}{۲}$$
$$\Rightarrow ۲\cos x.\cos y.\sin\frac{x+y}{۲} \leq ۲\cos^۲\frac{x+y}{۲}.\sin\frac{x+y}{۲}$$
$$\Rightarrow \frac{۲\sin\frac{x+y}{۲}}{\cos\frac{x+y}{۲}} \leq \frac{۲\cos\frac{x+y}{۲}.\sin\frac{x+y}{۲}}{\cos x.\cos y}$$
$$\Rightarrow ۲\tan\frac{x+y}{۲} \leq \frac{\sin(x+y)}{\cos x.\cos y}$$
$$\Rightarrow ۲\tan\frac{x+y}{۲} \leq \tan x + \tan y$$

حال برای اثبات درستی نامساوی * کافی است، لم قبل را دوبار تکرار کنیم:

برای $۰ < x, y, z, z' < \frac{\pi}{۲}$ داریم:

$$۴\tan\frac{\frac{x+y}{۲}+\frac{z+z'}{۲}}{۲} \leq ۲\tan\frac{x+y}{۲} + ۲\tan\frac{z+z'}{۲}$$
$$\leq \tan x + \tan y + \tan z + \tan z'$$
$$\Rightarrow ۴\tan\frac{x+y+z+z'}{۴} \leq \tan x + \tan y + \tan z + \tan z'$$

چون x، y، z و ´z دلخواه هستند، پس بدون آنکه خللی به کلیت مسئله وارد شود، فرض می‌کنیم:

$z' = \frac{x+y+z}{۳}$ که داریم:

$$۴\tan\frac{x+y+z+\frac{x+y+z}{۳}}{۴} \leq \tan x + \tan y + \tan z + \tan\frac{x+y+z}{۳}$$
$$\Rightarrow ۴\tan\frac{x+y+z}{۳} \leq \tan x + \tan y + \tan z + \tan\frac{x+y+z}{۳}$$
$$\Rightarrow ۳\tan\frac{x+y+z}{۳} \leq \tan x + \tan y + \tan z$$